8　不等式の種々の問題

68

(1)

(A)の左辺を因数分解することにより，$(x+2)(x-3)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 3$　・・・①

(B)の左辺を因数分解することにより，$\{x-(a-5)\}\{x-(a+2)\}\leq 0$

$\therefore a-5\leq x\leq a+2$　・・・②

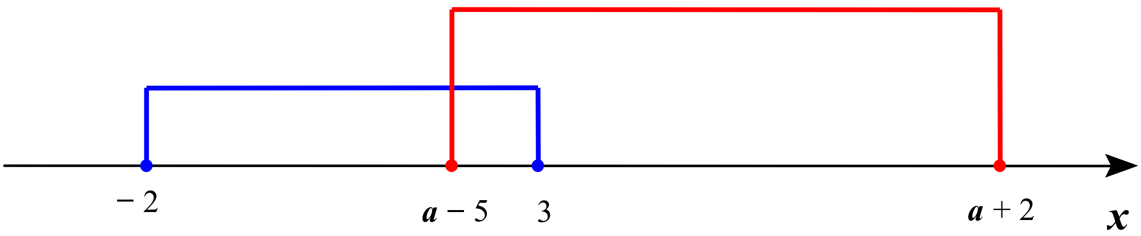
①が②の十分条件であればよいから，$a-5\leq -2$ かつ $3\leq a+2$

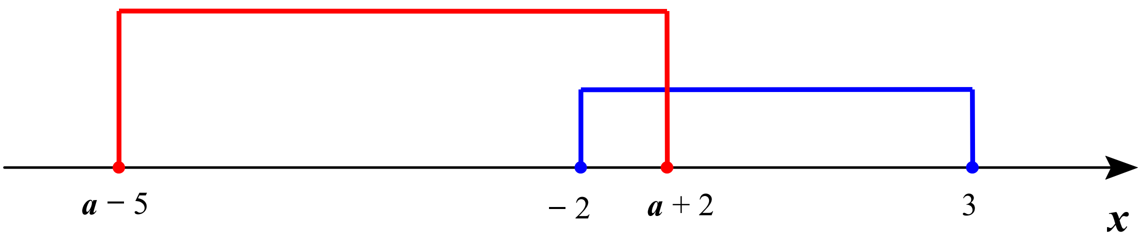
よって，$1\leq a\leq 3$

(2)

①と②の共通解が存在すればよいから，$a-5\leq 3$ かつ $-2\leq a+2$

よって，$-4\leq a\leq 8$





69

$x^2-3x+2>0$ より，$(x-1)(x-2)>0$　$\therefore x<1,\ 2<x$

よって，$1\leq x\leq 2$ はこれを満たさない。したがって，$x^2+ax+1>0$ の解に $1\leq x\leq 2$ が含まれればよく，これは，$y=f(x)=x^2+ax+1$ とおくと，$y=f(x)$ が $1\leq x\leq 2$ において $y>0$ であることと同値である。そこで，この条件を求めることにする。

$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$ より，$y=f(x)$ は軸 $x=-\dfrac{a}{2}$，頂点の y 座標が $-\dfrac{a^2}{4}+1$ の下に凸の放物線だから，満たすべき条件は

$1\leq -\dfrac{a}{2}\leq 2$ すなわち $-4\leq a\leq -2$ のとき

$-\dfrac{a^2}{4}+1>0$　$\therefore -2<a<2$

これは $-4\leq a\leq -2$ を満たさない。よって，不適

$-\dfrac{a}{2}<1$ または $2<-\dfrac{a}{2}$ すなわち $-4<a$ または $-2<a$ のとき

$f(1)=a+2>0$ かつ $f(2)=2a+5>0$　$\therefore a>-2$

これは $-4<a$ または $-2<a$ を満たす。

以上より，$a>-2$

70

解法 1：判別式で攻める

与式を y について整理すると，$y^2-(x+z)y+a(x^2+z^2)-zx\geq 0$

これが任意の実数 y に対して成り立つための必要十分条件は，

y の 2 次方程式 $y^2-(x+z)y+a(x^2+z^2)-zx=0$ の判別式を D_1 とすると，$D_1\leq 0$

これと

$$D_1=\{-(x+z)\}^2-4a(x^2+z^2)$$
$$=(1-4a)x^2+6zx+(1-4a)z^2$$

より，

$(1-4a)x^2+6zx+(1-4a)z^2\leq 0$　$\therefore (4a-1)x^2-6zx+(4a-1)z^2\geq 0$　・・・①

①において，$4a-1=0$ とすると，$-6zx\geq 0$

これは任意の実数 $x,\ z$ に対して成り立たない。（反例 $x=z=1$）

よって，①が任意の実数 x に対して成り立つための必要十分条件は，

$4a-1>0$ かつ $(4a-1)x^2-6zx+(4a-1)z^2=0$ 判別式を D_2 とすると，$D_2\leq 0$

これと $\dfrac{D_2}{4}=9z^2-(4a-1)^2z^2=-8z^2(2a+1)(a-1)$ より，

$4a-1>0$ かつ $(2a+1)(a-1)\geq 0$　$\therefore a\geq 1$

また，$a\geq 1$ ならば任意の実数 z に対して $D_2\leq 0$ となる。ゆえに，$a\geq 1$

解法 2：最小値で攻める

$$y^2-(x+z)y+a(x^2+z^2)-zx=\left(y-\frac{x+z}{2}\right)^2-\frac{(x+z)^2}{4}+a(x^2+z^2)-zx$$
$$=\left(y-\frac{x+z}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\{(4a-1)x^2-6zx+(4a-1)z^2\}$$

より，任意の実数 $x,\ z$ に対して $(4a-1)x^2-6zx+(4a-1)z^2\geq 0$ を満たせばよい。

ここで，$4a-1=0$ とすると，$-6zx\geq 0$

これは任意の実数 $x,\ z$ に対して成り立たない。（反例 $x=z=1$）よって，不適。

また，$4a-1<0$ とすると，$x>0,\ z>0$ のとき常に $(4a-1)x^2-6zx+(4a-1)z^2<0$ となり不適。

そこで，$4a-1>0$ とし，$(4a-1)x^2-6zx+(4a-1)z^2$ を変形することにより，

条件を満たす a の値の範囲を求めることにする。

$$(4a-1)x^2-6zx+(4a-1)z^2=(4a-1)\left(x^2-\frac{6}{4a-1}zx+z^2\right)$$
$$=(4a-1)\left\{\left(x-\frac{3}{4a-1}z\right)^2-\frac{9}{4a-1}z^2+z^2\right\}$$
$$=(4a-1)\left\{\left(x-\frac{3}{4a-1}z\right)^2+\frac{(4a-1)^2-9}{4a-1}z^2\right\}$$
$$=(4a-1)\left\{\left(x-\frac{3}{4a-1}z\right)^2+\frac{\{(4a-1)+3\}\{(4a-1)-3\}}{4a-1}z^2\right\}$$
$$=(4a-1)\left\{\left(x-\frac{3}{4a-1}z\right)^2+\frac{8(2a+1)(a-1)}{4a-1}z^2\right\}$$
$$=(4a-1)\left(x-\frac{3}{4a-1}z\right)^2+8(2a+1)(a-1)z^2$$

$4a-1>0$ だから，$(2a+1)(a-1)\geq 0$ すなわち $a\geq 1$ であれば任意の実数 $x,\ z$ に対して

$(4a-1)x^2-6zx+(4a-1)z^2\geq 0$ が成り立つ。

よって，求める a の値の範囲は $a\geq 1$

71

(1)

$f(x)=(x-1)^2+1$ より，$f(x)$ の最小値は 1

$g(x)=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+a$ より，$g(x)$ の最大値は $\dfrac{a^2}{4}+a$

$f(s)\geq g(t)$ が成り立つには，$f(x)$ の最小値 $\geq g(x)$ の最大値であればよいから，$1\geq\dfrac{a^2}{4}+a$

両辺に 4 を掛けて，整理すると，$(a+2)^2\leq 8$　$\therefore -2-2\sqrt{2}\leq a\leq -2+2\sqrt{2}$

(2)

解法 1：放物線と x 軸との関係から解く

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，$y=h(x)$ が $0\le x\le 1$ において $h(x)\ge 0$ を満たせばよい。

$$h(x)=2x^2-(a+2)x-(a-2)$$
$$=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\left(a^2+12a-12\right)$$

より，

$y=h(x)$ は軸が $x=\dfrac{a+2}{4}$，頂点の y 座標が $-\dfrac{1}{8}\left(a^2+12a-12\right)$ で下に凸の放物線である。

(i) $0\le\dfrac{a+2}{4}\le 1$ すなわち $-2\le a\le 2$ のとき

最小値 $-\dfrac{1}{8}\left(a^2+12a-12\right)$ が 0 以上が必要だから，$a^2+12a-12\le 0$

これを解くことにより，$-6-4\sqrt{3}\le a\le -6+4\sqrt{3}$

これと $-6-4\sqrt{3}<-2,\ -6+4\sqrt{3}<2$ より，a の範囲は $-2\le a\le -6+4\sqrt{3}$ ・・・①

(ii) $\dfrac{a+2}{4}<0$ または $1<\dfrac{a+2}{4}$ すなわち $a<-2$ または $2<a$ のとき

$h(0)\ge 0$ かつ $h(1)\ge 0$ すなわち $-(a-2)\ge 0$ かつ $-2a+2\ge 0$ が必要である。

これを解くと $a\le 1$

これと $a<-2$ または $2<a$ より，a の範囲は $a<-2$ ・・・②

①または②より，求める a の範囲は $a\le -6+4\sqrt{3}$

解法 2：文字定数 a を含む 1 次式を分離

$0\le x\le 1$ において $f(x)-g(x)=2x^2-2x+2-a(x+1)\ge 0$

すなわち $2x^2-2x+2\ge a(x+1)$ を満たす a の範囲を求めればよい。

これは $h(x)=2x^2-2x+2$，$i(x)=a(x+1)$ とおくと，

$0\le x\le 1$ において $h(x)\ge i(x)$ を満たす a の範囲を求めることと同値である。

$h(x)$ と $i(x)$ が $0\le x\le 1$ において接するような a が存在し，$h(x)$ が下に凸であることから，

$i(x)$ の傾き a が $h(x)$ と $i(x)$ が接するときの a の値以下であればよい。

そこで，$h(x)$ と $i(x)$ が $0\le x\le 1$ において接するような a の値を求めることにする。

$h(x)=i(x)$ すなわち $2x^2-2x+2=a(x+1)$ の解は $0\le x\le 1$ を満たす重解だから，

まず $2x^2-2x+2=a(x+1)$ を x について整理し，$2x^2-(a+2)x-(a-2)=0$ とする。

重解をもつならば判別式が 0 だから，$(a+2)^2+8(a-2)=a^2+12a-12=0$

$\therefore a=-6\pm 4\sqrt{3}$ ・・・①

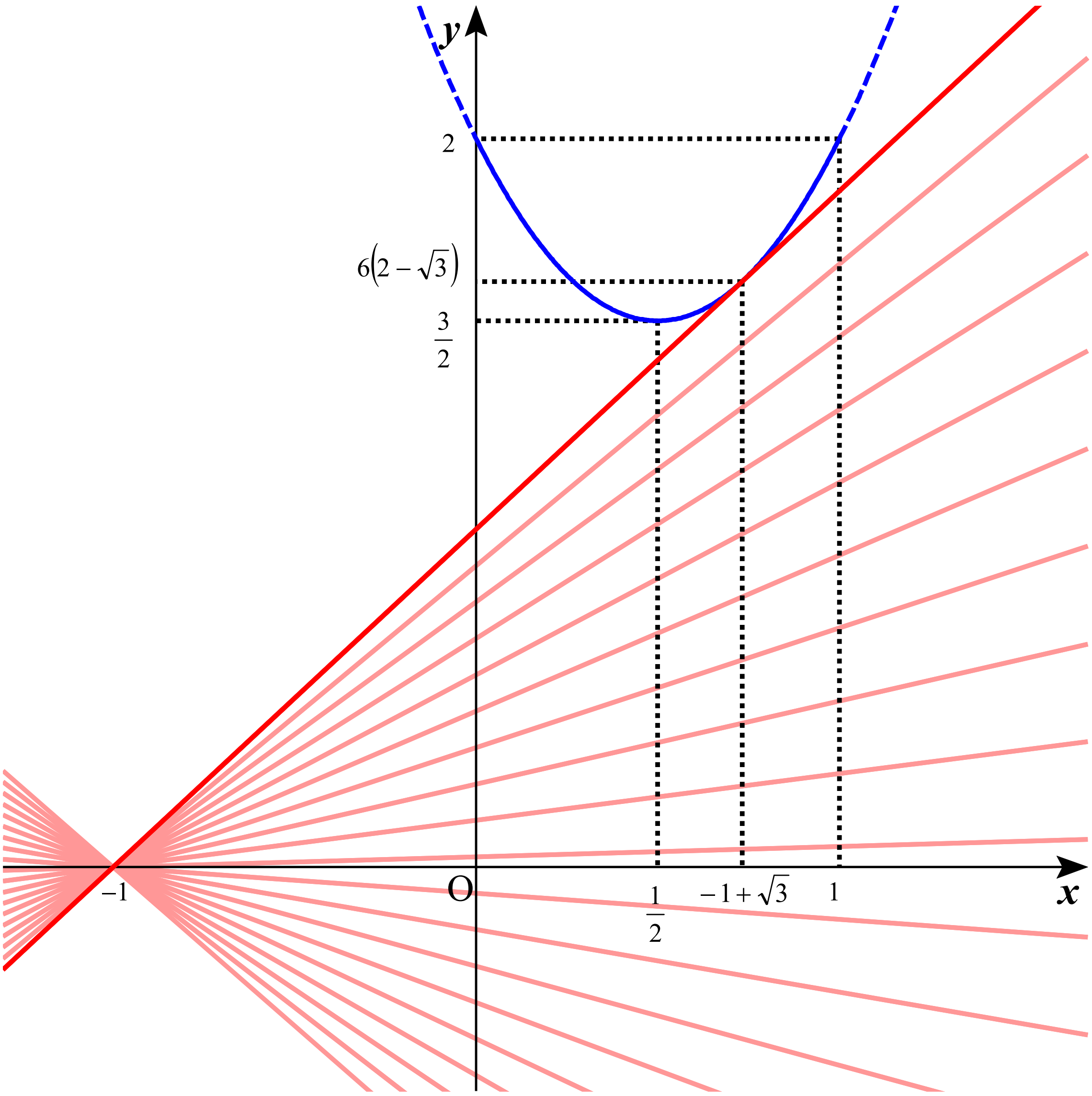
また，重解を α とすると，解と係数の関係より，$\alpha+\alpha=\dfrac{a+2}{2}$ $\therefore \alpha=\dfrac{a+2}{4}$

これが$0 \leq \alpha \leq 1$を満たすから，$0 \leq \dfrac{a+2}{4} \leq 1$　$\therefore -2 \leq a \leq 2$　・・・②

①かつ②より，$a = -6 + 4\sqrt{3}$

ゆえに，求めるaの範囲は$a \leq -6 + 4\sqrt{3}$

参考図



解法 **3**：文字定数 ***a*** を分離し，解法 **2** と同様の方法で，数学Ⅲで解く

$f(x) - g(x) = 2x^2 - 2x + 2 - a(x+1) \geq 0$ より，$2x^2 - 2x + 2 \geq a(x+1)$

$0 \leq x \leq 1$ より，$\dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x+1} \geq a$　以下略

72

(1)

$$
\begin{aligned}
a^4+b^3-a^3-ab^2 &= a^3(a-1)-b^3(a-1)\\
&=(a-1)(a^3-b^3)\\
&=(a-1)(a-b)(a^2+ab+b^2)\\
&=\{a^2-(b+1)a+b\}\left\{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right\}\\
&=\left\{\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2-\frac{(b-1)^2}{4}\right\}\left\{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right\}
\end{aligned}
$$

任意の実数aに対して$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$が成り立つから,

$\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2-\frac{(b-1)^2}{4}$の最小値$-\frac{(b-1)^2}{4}$が$-\frac{(b-1)^2}{4}\geq 0$を満たせばよい。

よって，$b=1$

(2)

$b=1$のとき

(1)より，成り立つ。

$b\neq 1$のとき

(1)より，$a^4+b^3-a^3-ab^2=(a-1)(a-b)\left\{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right\}$

任意の整数aに対して$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$は成り立つから,

任意の整数aに対して$(a-1)(a-b)\geq 0$が成り立てばよい。

このとき，$(a-1)(a-b)<0$となるような整数aが存在しない。

すなわち，$b<1$のとき$b<a<1$を満たす整数aが，$1<b$のとき$1<a<b$を満たす整数aが存在しない。

よって，$b=0, 2$

以上より，$b=0, 1, 2$

73

$f(f(x))=\{f(x)+a\}\{f(x)+2\}$ より，

(i)　$a=2$ のとき

$$f(f(x))=\{f(x)+2\}^2$$
$$=\{(x+2)^2+2\}^2$$

よって，すべての実数 x に対して $f(f(x))>0$ が成り立つ。

(ii)　$a>2$ のとき

$f(x)<-a$ または $-2<f(x)$ が成り立てばよい。

$f(x)<-a$ について

$f(x)+a<0$ より，

$(x+2)(x+a)+a=x^2+(a+2)x+3a<0$

x^2 の係数が正だから，すべての実数 x に対してこの不等式は成り立たない。

$-2<f(x)$ について

$f(x)+2>0$　すなわち $x^2+(a+2)x+2a+2>0$

判別式を D とすると，$D<0$ ならばすべての実数 x に対してこの不等式が成り立つ。

このとき，$D=(a+2)^2-4(2a+2)=a^2-4a-4=(a-2)^2-8$ より，

$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$

(i)，(ii)より，$2\leq a<2+2\sqrt{2}$

74

$ab>0$ より，$a>0,\ b>0$ または $a<0,\ b<0$

$a>0,\ b>0$ のとき

x^2 の係数がいずれの不等式とも正だから，同時に満たす x は無数に存在する。

$a<0,\ b<0$ のとき

$$2ax^2-ax-6x+3=2ax^2-(a+6)x+3$$
$$=2a\left(x^2-\frac{a+6}{2a}x+\frac{3}{2a}\right)$$
$$=2a\left\{x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{a}\right)x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{a}\right\}$$
$$=2a\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{a}\right)$$

これと $a<0$ より，$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{a}\right)\leq 0$　$\therefore \frac{3}{a}\leq x\leq\frac{1}{2}$　・・・①

$bx^2+5x+\frac{2}{b}=b\left(x^2+\frac{5}{b}x+\frac{2}{b^2}\right)$　$b<0$ より，$x^2+\frac{5}{b}x+\frac{2}{b^2}\leq 0$

$\therefore \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2b} \leq x \leq \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2b}$　$\left(\because b<0,\ -5-\sqrt{17}<-5+\sqrt{17}<0\right)$　・・・②

②で$\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2b}>0$だから，①と②を同時に満たす$x$がただ1つ存在するとき，

$\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2b}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore b=-5+\sqrt{17}$

75

解法1：絞り込み

xの2次不等式$5x^2-2kx+1<0$の$x>0$における解に整数がちょうど1個含まれるようなkを求めればよい。

$5x^2-2kx+1=0$の解を求めると，$\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-5}}{5}$

よって，$5x^2-2kx+1<0$を満たす解が存在するとき，

$k^2-5>0$かつ$k>0$より，$k>\sqrt{5}$　・・・①

また，このとき$0<\dfrac{k-\sqrt{k^2-5}}{5}<x<\dfrac{k+\sqrt{k^2-5}}{5}$だから，

解に整数がちょうど1個含まれるとき，$\dfrac{k+\sqrt{k^2-5}}{5}-\dfrac{k-\sqrt{k^2-5}}{5}\leq 2$を満たす。

これより，$\sqrt{k^2-5}\leq 5$　$\therefore k^2\leq 30$　・・・②

よって，考えられる整数kは，①かつ②より，$k=3,\ 4,\ 5$

$k=3$のとき

$5x^2-6x+1=(x-1)(5x-1)<0$　$\therefore \dfrac{1}{5}<x<1$

よって，不適

$k=4$のとき

$5x^2-8x+1=5\left(x-\dfrac{4}{5}\right)^2-\dfrac{11}{5}<0$より，これを満たす整数は$x=1$のみである。

$k=5$のとき

$5x^2-10x+1=5(x-1)^2-4<0$より，これを満たす整数は$x=1$のみである。

以上より，条件を満たすkは4と5である。

解法 2：k を含む 1 次式を分離して解く

x の 2 次不等式 $5x^2-2kx+1<0$ の $x>0$ における解に整数がちょうど 1 個含まれるような k を求めればよい。

$5x^2-2kx+1<0$ より，$\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}<kx$

ここで，$y=f(x)=\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}$，$y=g(x)=kx$ とおき，

$x>0$ において $f(x)<g(x)$ となるような整数がちょうど 1 個存在するような k を求める。

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が接するとき $5x^2-2kx+1=0$ が重解をもつから，

判別式を D とすると，$D=0$

これと $\frac{D}{4}=k^2-5$ より，$k^2-5=0$　$\therefore k=\sqrt{5}$ $(\because k>0)$

よって，接点の x 座標は $5x^2-2\sqrt{5}x+1=0$ の重解であり，

この重解を α とすると，解と係数の関係より，$2\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$\therefore \alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

よって，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接点の x 座標は $\frac{\sqrt{5}}{5}$ である。

これと $\frac{\sqrt{5}}{5}<1$ より，k を $\sqrt{5}$ から連続的に増加させていくと，

$y=g(x)$ はやがて $(1,\ f(1))$ を通ることになる。

このとき，$f(1)=g(1)$ より，$3=k\cdot 1$　$\therefore k=3$　・・・①

さらに k を増加させていくと，$y=g(x)$ はやがて $(2,\ f(2))$ を通ることになる。

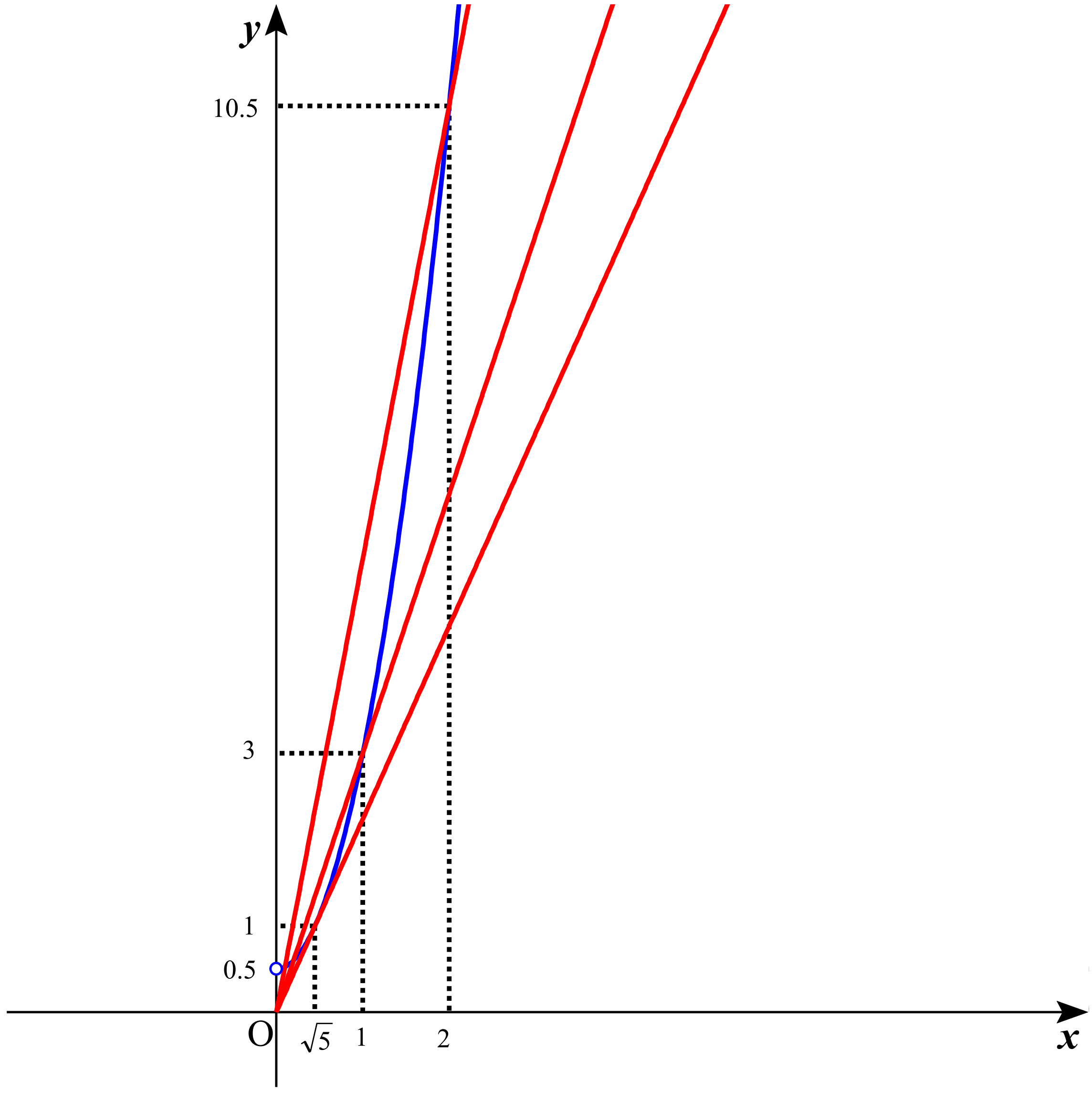
このとき，$f(2)=g(2)$ より，$\frac{21}{2}=2k$　$\therefore k=\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}$　・・・②

よって，整数がちょうど 1 個存在するとき，その整数は 1 であり，

このときの k の範囲は，①と②より，$3<k\leq 5+\frac{1}{4}$

ゆえに，求める整数 k は 4 と 5 である。

参考図



76

(1)

$$\frac{1}{x-3}+\frac{4}{6-x}-3=\frac{(6-x)+4(x-3)-3(x-3)(6-x)}{(x-3)(6-x)}$$
$$=\frac{3(x-2)+3(x-3)(x-6)}{(x-3)(6-x)}$$
$$=\frac{3(x^2-8x+16)}{(x-3)(6-x)}$$
$$=\frac{3(x-4)^2}{(x-3)(6-x)}$$

$3<x<6$ より，$(x-3)(6-x)>0$

よって，$\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}-3\geq 0$ すなわち $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}\geq 3$（等号は $x=4$ のとき成立）

(2)

解法 1

$\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}>\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}\geq 3$ より，定数 a の最大値を $a\geq 3$ の範囲で考えることにする。

与式の両辺に $(x-3)(6-x)$ を掛けてから両辺を x について整理すると，

$ax^2-(9a+1)x+18a+18\geq 0$

したがって，$y=f(x)=ax^2-(9a+1)x+18a+18$ とおくと，

$3<x<6$ における $y=f(x)$ の最小値が 0 以上になるような a の最大値を求めればよい。

$$f(x)=ax^2-(9a+1)x+18a+18$$
$$=a\left(x-\frac{9a+1}{2a}\right)^2-\frac{9a^2-54a+1}{4a}$$

軸 $x=\dfrac{9a+1}{2a}$ について，$\dfrac{9a+1}{2a}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2a}$ および $a\geq 3$ より，$3<\dfrac{9}{2}<\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2a}\leq\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{14}{3}<6$

よって，軸は $3<x<6$ の範囲にある。

したがって，$y=f(x)$ の最小値は $f\left(\dfrac{9a+1}{2a}\right)=-\dfrac{9a^2-54a+1}{4a}\geq 0$

$\therefore 9a^2-54a+1\leq 0\ (\because a\geq 3)$

これを $a\geq 3$ の範囲で解くと，$3\leq a\leq 3+\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

補足：平方完成を使って解く $9a^2-54a+1=9(a-3)^2-80\leq 0$

よって，求める a の最大値は $a=3+\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

解法 2

$\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}>\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}\geq 3$ より，定数 a の最大値を $a\geq 3$ の範囲で考えることにする。

与式の両辺に $(x-3)(6-x)$ を掛けてから両辺を次のように整理する。

$a(x^2-9x+18)=x-18$

次に，$f(x)=a(x^2-9x+18)$，$g(x)=x-18$ とおくと，

$f(x)$ と $g(x)$ の接点の x 座標を t とすると，$f'(t)=1$ より，$a(2t-9)=1$　$\therefore t=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2a}$

$a\geq 3$ より，$3<\dfrac{9}{2}<\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2a}\leq\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{14}{3}<6$ だから，$3<t<9$

よって，$f(x)$ と $g(x)$ は $3<x<9$ の範囲で接する。

また，

$$f(x)=a\left\{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}$$
$$=a\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{9a}{4}$$

より，

a の増加とともに放物線の頂点は軸 $x=\dfrac{9}{2}$ 上を下向きに移動する。

よって，$f(x)$ と $g(x)$ が接するとき a は最大値をとる。

このとき，$f(x)-g(x)=0$ すなわち $ax^2-(9a+1)x+18a+18=0$ は重解をもつ。

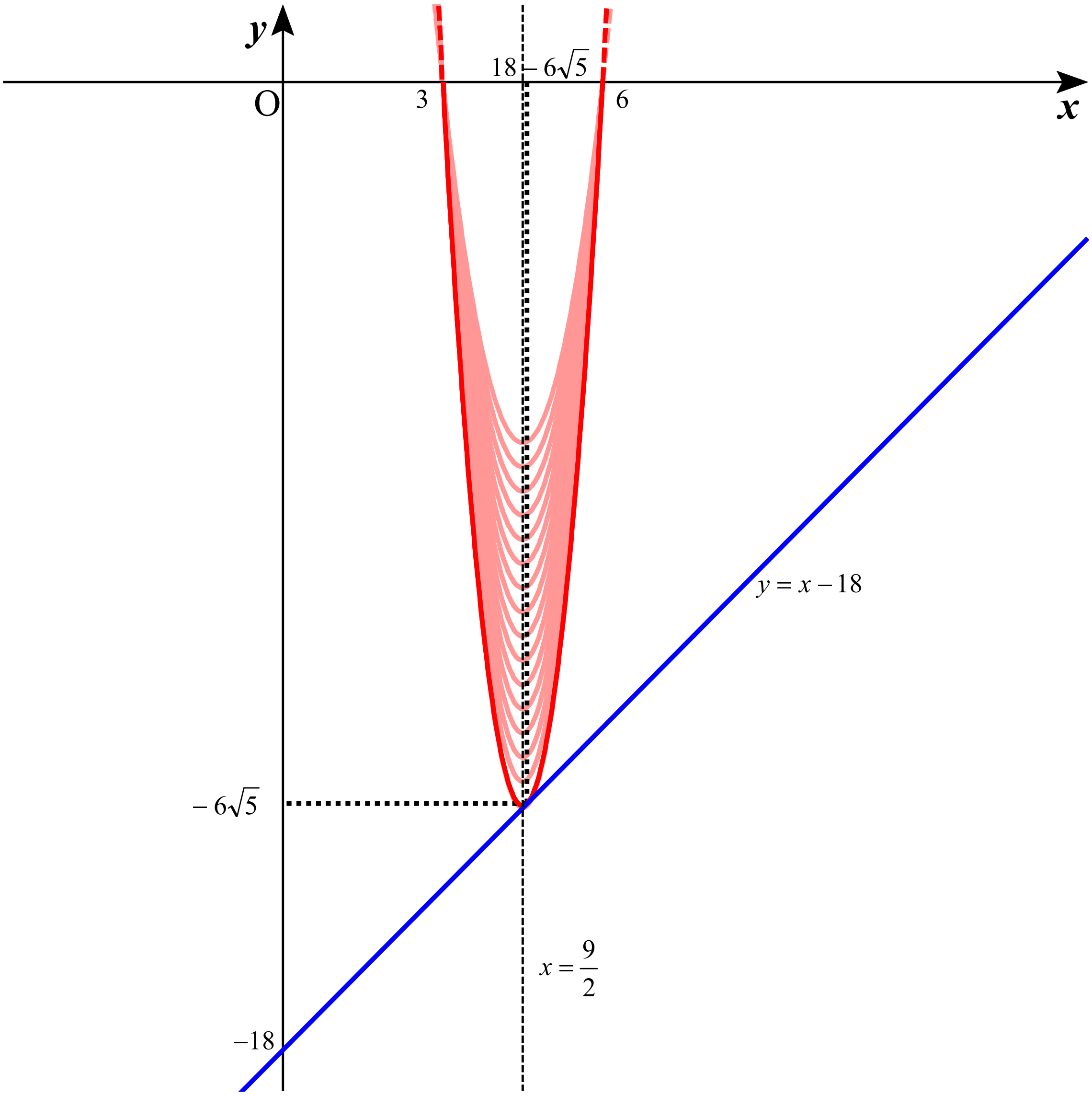
したがって，判別式を D とすると，$D=0$ および

$D=(9a+1)^2-4a(18a+18)=9a^2-54a+1=9(a-3)^2-80$ より，$9(a-3)^2-80=0$

これと $a\geq 3$ から a を求めると，$a=3+\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

よって，求める a の最大値は $a=3+\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

参考図



補足

いざというときは，$y=f(x)=\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{4}{6-x}$ と $y=a$ の共有点から求めるという手もある。

ただし，数学Ⅲ